Kapitel 4

Erweiterung des statischen volkwirtschaftlichen Verflechtungsmodells mit nichtlinearen Materialaufwandsfunktionen

In unseren bisherigen Betrachtungen haben wir uns auf die ersten beiden Quadranten der Verflechtungstabelle beschränkt. Es wurde dabei vorausgesetzt, dass Primärressourcen in unbegrenzter Menge zur Verfügung stehen. In diesem Kapitel werden diese Einschränkungen aufgehoben und der dritte Quadrant in die Untersuchung mit einbezogen.
Es wird darauf eingegangen, wie die Koeffizienten des vollen Ressourcenaufwands unter Einbeziehung spezieller Ressourcenaufwandsfunktionen bestimmt werden können. Ferner werden einige Beispiele für die Anwendung von Koeffizienten des direkten und vollen Ressourcenaufwands angeführt.
Die Berücksichtigung begrenzt verfügbaren Ressourcen erlaubt es, andererseits statische volkswirtschaftliche Verflechtungsmodelle mit nichtlinearen Material- und Primärressourcenaufwandsfunktionen zu optimieren. Zu einem wichtigen Spezialfalls des Problems (1. 23.) wird ein Optimierungsmodell konstruiert, bei dem der nach den einzelnen Zweigen gewogene Endverbrauch der Volkswirtschaft maximiert wird. Es wird u.a. vorausgesetzt, dass jeder Zweig mindestens einen Endverbrauch sichert und dass die verfügbare Menge der *einzig* vorhandenen Primärressource beschränkt ist.
Es lassen sich interessante Zusammenhänge zwischen den beiden genannten Problemen feststellen. Man kann insbesondere zeigen, dass die Lösbarkeit des Optimierungsproblems im Wesentlichen davon abhängt, ob die Primärressource voll ausgeschöpft wird oder nicht. In einem weiteren Optimierungsproblem wird der Fall erörtert, dass mehrere Primärressourcen vorhanden sind.

4. 1. Die Primärressourcen in statischen volkswirtschaftlichen Verflechtungsmodellen mit nichtlinearen Materialaufwandsfunktionen

Als *Randinputs* (bzw. *exogene Faktoren*) werden Wertbestandtele außer den Lieferungen innerhalb der produktiven Sphäre bezeichnet. Sie umfassen insbesondere die *Primärressourcen* (Arbeitskräfte, Grundfonds usw.).
Zur Vereinfachung der Darstellung und Meidung von Wiederholungen wird zunächst von einer einzigen Primärressource ausgegangen. Allgemein sei jedoch

$$\tilde{b}: R_+^n \to R_+^n \tag{4. 1.}$$

als *Primärressourcenfunktion* bezeichnet.
Ähnlich der Beziehung (2. 15.) könnte man zur Vereinfachung

$$\tilde{b}_j := c_j b_j, \quad c_j \in R_+^1, \tag{4. 2.}$$

setzen.
Die Hypothese (4. 2.) bedeutet, dass der Anteil des Primärressourcenaufwands des j – Zweiges am Gesamtmaterialaufwand dieses Zweiges konstant ist (vgl. [3], S. 118).

Die praktische Ermittlung der Primärressourcenfunktionen ist mit im Wesentlichen gleichen Problemen verbunden wie die der Materialaufwandsfunktionen. Daher wird auf ihre nochmalige Diskussion verzichtet und auf den *Abschnitt 2. 5.* Verwiesen. Es sei lediglich an das schwierige Problem der „Zeitbereinigung“ erinnert, dass auch bei der Primärressourcen-funktionen auftritt. Dieses Problem könnte ebenfalls z.B. über eine ähnliche Optimierungsaufgabe wie (2. 18.) behandelt werden.

Wie wollen auch hier $\tilde{b}_j$, $j = 1,2,...,n$, als eine im Allgemeinen von der Gesamtproduktion aller Zweige abhängige Größe betrachten, d.h.

(4. 3.) $$\tilde{b}_j := \tilde{b}_j(x) \equiv \tilde{b}_j^+(x) \cdot x_j, \quad j = 1,2,...,n.$$

Zwei wichtige Spezialfälle der Primärressourcenfunktion (4. 3.) sind:

(4. 4.) $$\tilde{b}_j := \tilde{b}_j(x_j) \equiv \tilde{b}_j^+(x_j) \cdot x_j, \quad j = 1,2,...,n$$

und

(4. 5.) $$\tilde{b}_j := \tilde{b}_j^+ \cdot x_j, \quad j = 1,2,...,n.$$

Aus (4. 5.) geht hervor, dass die vom Zweig j, $j = 1,2,...,n$, benötigte Menge an die Primärressource der Gesamtproduktion dieses Zweiges proportional ist. Die Größe

(4. 6.) $$\tilde{b}_j^+ := \frac{\tilde{b}_j}{x_j}, \quad j = 1,2,...,n,$$

Wird dann als *Koeffizient des direkten Primärressourcenaufwands* bezeichnet.
Wegen der Begrenztheit der Ressourcen gilt dann

(4. 7.) $$\tilde{b}^+ x \le \tilde{b}$$

mit

$$\tilde{b}^+ x := (\tilde{b}_j^+), \quad j = 1,2,...,n,$$

und

$\tilde{b} \in R_+^1$: die benötigte Menge an die Primärressource für alle Zweige der Volkswirtschaft.

Analog den Koeffizienten des vollen Materialaufwands lassen sich auch für die Primärressourcen *Koeffizienten des vollen Primärressourcenaufwands* b_j, $j = 1,2,...,n$, nach folgender Formel berechnen:

(4. 8.) $$\tilde{\tilde{b}}_j = \tilde{\tilde{b}}_j^{+} + \tilde{\tilde{b}}_j^{++}, \quad j = 1,2,...,n,$$

mit

$\tilde{\tilde{b}}_j^{+}$: der Koeffizient des direkten Primärressourcenaufwands für den Zweig j,

$\tilde{\tilde{b}}_j^{++}$: der Koeffizient des indirekten Primärressourcenaufwands für den Zweig j.

Entsprechend den Formel (4. 3.) – (4. 5.) lassen sich die Koeffizienten des vollen Primärressourcenaufwands $\tilde{\tilde{b}}_j$, $j = 1,2,...,n,$ folgendermaßen ermitteln:

(4. 9.) $$\begin{aligned}\tilde{\tilde{b}}_j &= \tilde{b}_j^{+}(x^*) + \sum_{i=1}^{n} \tilde{\tilde{b}}_i a_{ij}(x^*) \\ &= \tilde{b}_j^{+}(x^*) + \sum_{i=1}^{n} \tilde{\tilde{b}}_i \frac{b_{ij}(x^*)}{x_j^*}, \quad j = 1,2,...,n,\end{aligned}$$

bzw.

(4. 10.) $$\begin{aligned}\tilde{\tilde{b}}_j &= \tilde{b}_j^{+}(x_j^*) + \sum_{i=1}^{n} \tilde{\tilde{b}}_i a_{ij}(x_j^*) \\ &= \tilde{b}_j^{+}(x_j^*) + \sum_{i=1}^{n} \tilde{\tilde{b}}_i \frac{b_{ij}(x_j^*)}{x_j^*}, \quad j = 1,2,...,n,\end{aligned}$$

bzw.

(4. 11.) $$\begin{aligned}\tilde{\tilde{b}}_j &= \tilde{b}_j^{+} + \sum_{i=1}^{n} \tilde{\tilde{b}}_i a_{ij} \\ &= \tilde{b}_j^{+} + \sum_{i=1}^{n} \tilde{\tilde{b}}_i \frac{b_{ij}}{x_j^*}, \quad j = 1,2,...,n.\end{aligned}$$

Hier ist $x^* := (x_j^*) \in R_+^n$ eine Lösung des Problems (1. 23.).
Für die Spezialfälle

$$b(x) := (\sum_{j=1}^{n} c_{1j} b_j(x), ..., \sum_{j=1}^{n} c_{nj} b_j(x))^T$$

bzw.

$$b(x) := (\sum_{j=1}^{n} c_{1j} b_j(x_j), ..., \sum_{j=1}^{n} c_{nj} b_j(x_j))^T$$

Lassen sich (4. 10.) bzw. (4. 11.) folgendermaßen umschreiben:

(4. 12.) $$\tilde{\tilde{b}}_j = \tilde{b}_j^{+}(x^*) + \sum_{i=1}^{n} \tilde{\tilde{b}}_i \frac{c_{ij} b_j(x^*)}{x_j^*}, \quad j = 1,2,...,n,$$

bzw.

(4. 13.) $$\approx_j = \tilde{b}_j^+(x_j^*) + \sum_{i=1}^{n} \tilde{\tilde{b}}_i \frac{c_{ij} b_j(x_j^*)}{x_j^*}, \quad j = 1,2,...,n.$$

Im Falle linearer Materialaufwandsfunktionen gilt:

$$b_j(x) = b_j(x_j) = c_j x_j, \quad j = 1,2,...,n,$$

d. h.

$$\frac{c_{ij} b_j(x^*)}{x_j^*} = \frac{c_{ij} b_j(x_j^*)}{x_j^*}$$
$$= c_{ij} c_j = a_{ij}, \quad j = 1,2,...,n.$$

Zur Vereinfachung kann man statt $\tilde{b}_j^+(x^*), j = 1,2,...,n,$ die auf Grund der durch eine entsprechende Zeitreihe ermittelten Regressionsfunktion $\tilde{b}_j^+(x), j = 1,2,...,n,$ berechnet werden, einfach die Konstanten Koeffizienten $\tilde{b}_j^+, j = 1,2,...,n,$ verwenden.

Das Gleichungssystem (4. 9.) lässt sich in der Matrizenschreibweise wie folgt darstellen:

(4. 14.) $$\tilde{\tilde{b}} = \tilde{b}^+(x^*) + A^T(x^*)\tilde{\tilde{b}}.$$

Hier sind:

$$\tilde{\tilde{b}} := (\tilde{\tilde{b}}_j) \in R_+^n,$$

$$\tilde{b}^+(x^*) := (\tilde{b}_j^+(x^*)) \in R_+^n,$$

$$A(x^*) := (a_{ij}(x^*)), \quad i,j = 1,2,...,n.$$

Aus (4. 14.) lässt sich $\tilde{\tilde{b}}$ wie folgt direkt berechnen:

$$\tilde{\tilde{b}} = (E - A^T(x^*))^{-1} \tilde{b}^+(x^*).$$

Zur Lösung des linearen Gleichungssystems (4. 14.) kann man aber auch das Verfahren der sukzessiven Approximation (*VSA*) anwenden, das gleichzeitig den Prozess des schrittweisen Anwachsens des vollen Primärressourcenaufwands abbildet:

(4. 15.) $$\tilde{\tilde{b}}^{(0)} := \tilde{b}^+(x^*),$$

(4. 16.) $$\tilde{\tilde{b}}^{(\upsilon)} := A^T(x^*)\tilde{\tilde{b}}^{(\upsilon-1)} + \tilde{b}^+, \quad \upsilon \in N.$$

Man kann zeigen, dass die durch (4. 15.) – (4. 16.) erzeugte Folge monoton wachsend ist und gegen die eindeutige Lösung des linearen Gleichungssystems (4. 14.) konvergiert.

Diese Folge ist aber auch für jede beliebige Anfangslösung $\tilde{\tilde{b}}^{(0)}$ konvergent, wobei der entsprechende Grenzwert die Lösung des Gleichungssystems (4. 14.) ist.
Für die Folge (4. 15.) – (4. 16.) gilt die Fehlerabschätzung

$$\| \tilde{\tilde{b}} - \tilde{\tilde{b}}^{(\upsilon)} \| \leq \frac{\| A^T(x^*) \|^{\upsilon+1}}{1 - \| A^T(x^*) \|} \| \tilde{b}^{+}(x^*) \| . \tag{4. 17.}$$

Zur Lösung des Gleichungssystems (4. 14.) kann man auch das Gauß-Seidel-Verfahren anwenden, das gewöhnlich schneller konvergiert als das Verfahren (4. 15.) – (4. 16.):

$$\tilde{\tilde{b}}_i^{(0)} := \tilde{\tilde{b}}_i^{+}(x^*), \quad i = 1,2,...,n \tag{4. 18.}$$

$$\tilde{\tilde{b}}_i^{(\upsilon)} := \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}^T(x^*) \tilde{\tilde{b}}_j^{(\upsilon)} + \sum_{j=1}^{i} a_{ij}^T(x^*) \tilde{\tilde{b}}_j^{(\upsilon-1)} + \tilde{b}_i^{+}(x^*), \quad i,j = 1,2,...,n; \ \upsilon \in N. \tag{4. 19.}$$

Man kann zeigen, dass die durch (4. 18.) – (4. 19.) erzeugte Folge monoton wachsend ist und gegen die einzige Lösung des linearen Gleichungssystems (4. 14.) konvergiert. Dabei gilt die Fehlerabschätzung

$$| \tilde{\tilde{b}}_i - \tilde{\tilde{b}}_i^{(\upsilon)} | \leq \frac{\sigma^{\upsilon}}{1-\sigma} \cdot \max_j | \tilde{\tilde{b}}_j^{(1)} - \tilde{\tilde{b}}_j^{(0)} | \tag{4. 20.}$$

mit

$$\sigma := \max_i \frac{\sum_{j=1}^{n} | a_{ij}^T(x^*) |}{1 - \sum_{j=1}^{i-1} | a_{ij}^T(x^*) |} \tag{4. 21.}$$

$$\leq \| A^T(x^*) \|_{\infty} .$$

Multipliziert man die Gleichung (1. 14.) von links mit y^T , so ergibt sich

$$y^T \tilde{\tilde{b}} = x^T \bar{b}^{+} \tag{4. 22.}$$

bzw.

$$\sum_{i=1}^{n} y_i \tilde{\tilde{b}}_i = \sum_{i=1}^{n} x_i \tilde{b}_i^{+} . \tag{4. 22‘.}$$

Hieraus folgt eine ökonomische Interpretation des Koeffizienten $\tilde{b}_i$ des $i-$ten vollen Primärressourcenaufwands: Er gibt den Primärressourcenaufwand pro Einheit des Endverbrauchs an.

Im Folgenden werden einige Beispiele für die Anwendung von Koeffizienten des direkten und vollen Primärressourcenaufwands angeführt:

1) Die einfache Primärressourcenquote. Sie ist die Reziproke Ausdruck des direkten Primärressourcenaufwands:

(4. 23.) $$\frac{1}{b_j^+} = \frac{x_j^*}{\tilde{b}_j}, \quad j = 1,2,...,n.$$

2) Der Primärressourcenaufwand eines Zweiges zur Herstellung dessen Produktes:

(4. 24.) $$\tilde{\tilde{b}}_i \cdot y_i, \quad i = 1,2,...,n.$$

3) Der Primärressourcenaufwand aller Zweige zur Herstellung des Endproduktes der Volkswirtschaft:

(4. 25.) $$\sum_{i=1}^{n} \tilde{\tilde{b}}_i \cdot y_i$$

4) Der Primärressourcenaufwand eines Zweiges zur Realisierung der einzelnen Bestandteile des Endproduktes dieses Zweiges:

(4. 26.) $$\tilde{\tilde{b}}_i; \quad \tilde{\tilde{b}}_i \cdot s_i; \quad \tilde{\tilde{b}}_i \cdot u_i; \quad \tilde{\tilde{b}}_i \cdot v_i, \quad i = 1,2,...n.$$

Dabei sind:

$c_i,\ i: 1,2,...,n:$ die individuelle Konsumtion des Zweiges i,
$s_i,\ i = 1,2,...,n:$ die gesellschaftliche Konsumtion des Zweiges i,
$u_i,\ i = 1,2,...,n:$ die Investition des Zweiges i,
$v_i,\ i = 1,2,...,n:$ der Export des Zweiges i.

5) Der Primärressourcenaufwand aller Zweige zur Realisierung der einzelnen Bestandteile des Endproduktes der Volkswirtschaft:

(4. 27.) $$\sum_{i=1}^{n} \tilde{\tilde{b}}_i; \quad \sum_{i=1}^{n} \tilde{\tilde{b}}_i \cdot s_i; \quad \sum_{i=1}^{n} \tilde{\tilde{b}}_i \cdot u_i; \quad \sum_{i=1}^{n} \tilde{\tilde{b}}_i \cdot v_i.$$

6) Die komplexe Primärressourcenquote . Sie ist der reziproke Ausdruck des Koeffizienten des vollen Primärressourcenaufwands:

(4. 28.) $$\frac{1}{\tilde{\tilde{b}}_j}, \quad j = 1,2,...,n.$$

4. 2. Die Optimierung der statischen volkswirtschaftlichen Verflechtungsmodelle mit nichtlinearen Material- und Primärressourcenaufwandsfunktionen

Ausgang der Überlegungen dieses Abschnitts ist ein Spezialfall des Problems (1. 23.), wobei die Materialaufwandsfunktion $b: R_+^n \to R_+^n$ die Bedingungen (*B. 3.*) und (*B. 4.*) erfüllt:

(4. 29.)
$$x_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij}(x_j) + y_i$$
$$\equiv \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x_j)x_j, \quad i = 1,2,...,n.$$

Hier sind die Funktionen $a_{ij}(x_j),\ j = 1,2,...,n,$ stetig differenzierbar, und es gilt
$a_{ij} \geq 0,\ i, j = 1,2,...,n.$
Die Gleichung (4. 29.) lässt sich *formal* in der Gestalt (1. 22.) darstellen, wobei die o.g. Eigenschaften vorliegen müssen.
Auf Grund des Problems (4. 29.) wird nun folgende Optimierungsaufgabe konstruiert:

(4. 30.)
$$\max\{z = c^T(x - A(x)x \mid x \in M\}$$

$$M := \left\{x \in R_+^n \mid x - A(x)x \geq y,\ y \in R_+^n,\ \tilde{b}(x) \leq \tilde{b},\ \tilde{b} > 0\right\}.$$

Hier sind:

$c := (c_i) \in R^n,\ c_i \geq 0$ für mindestens ein $i = 1,2,...,n,$

$\tilde{b}(x)$: die zur Realisierung des Gesamtproduktionsvektors x benötigte Primärressource,

$\tilde{b}$: die verfügbare Menge an der Primärressource.

Im Weiteren mögen folgende <u>*Voraussetzungen*</u> gelten:

V1(1) Die Funktion $(E - A(x))x =: f(x)$ ist für alle $x \in R_+^n$ stetig;

V1(2) Das Problem (4. 29.) ist eindeutig lösbar;

V1(3) Sei
$$x := (E - A(x))^{-1} y$$

Die Lösung von (4. 29.). Dann sind die Elemente der Matrix $(E - A(x))^{-1}$ stetig für alle $x \in R_+^n$;

V1(4) $\left\langle x^1 - A(x^1)x^1 \geq x^2 - A(x^2)x^2,\ \forall x^1, x^2 \in R_+^n \right\rangle \quad \Rightarrow \quad x^1 \geq x^2;$

V2 Die Funktionen $((E - A(x))x)_i =: f_i(x),\ i = 1,2,...,n,$ sind für alle $x \in R_+^n$ konvex;

V3(1) $$\begin{cases} i)\ \tilde{b}(x) \geq 0 \\ ii)\ \tilde{b}(x) \text{ ist stetig} \end{cases}, \forall x \in R_+^n;$$

V3(2) $$\left\langle x^1 \geq x^2,\ x^1 \neq x^2, \forall x^1, x^2 \in R_+^n \right\rangle \Rightarrow \left\langle \tilde{b}(x^1) > \tilde{b}(x^2) \right\rangle;$$

V3(3) $$\tilde{b}(\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2) \geq \lambda \tilde{b}(x^1) + (1-\lambda)\tilde{b}(x^2), \quad \forall \lambda \in \left]0,\ 1\right[;\ \ \forall x^1, x^2 \in R_+^n;$$

V3(4) $$\forall k_1 = const. > 0\ \exists k_2 = const. > 0 :\ \tilde{b}(\tilde{x}) \geq k_1,\ \forall (\tilde{x} \in R_+^n \wedge \| \tilde{x} \| \geq k_2).$$

In (4. 30.) wird also der nach den einzelnen Zweigen gewogene Endverbrauch der Volkswirtschaft maximiert und zwar unter der Bedingung, dass

1) jeder Zwei mindestens seinen Endverbrauch sichert;
2) die verfügbare Menge der *einzig* vorhandenen Primärressource beschränkt ist.

Die Untersuchung erfolgt u.a. unter folgenden *Voraussetzungen*:

- Die Endverbrauchsfunktionen aller Zweige sind bezüglich der Gesamtproduktion stetig, monoton wachsend und konvex;
- Das der Optimierungsaufgabe (4. 30.) zugrunde liegende statische volkswirtschaftliche Verflechtungsmodell mit nichtlinearen Materialaufwandsfunktionen (4. 29.) ist eindeutig lösbar; die Elemente der entsprechenden Inversen sind bezüglich der Gesamtproduktion stetige Funktionen;
- Die Primärressourcenfunktion nimmt nur nichtnegative Werte an und ist stetig, streng monoton wachsend und konvex.

Unter den angeführten Bedingungen lassen sich folgende *Aussagen* beweisen:

A1: Das Optimierungsproblem (4. 30.) hat genau eine zulässige Lösung, wenn bei der Realisierung der Lösung von (4. 29.) die Primärressourcenmenge höchstens ausgeschöpft wird;

A2: Wenn bei der Realisierung der Lösung von (4. 29.) die Primärressource höchstens ausgeschöpft wird, dann hat das Optimierungsproblem (4. 30.) Optimallösungen;

A3: Wenn bei der Realisierung der Lösung von (4. 29.) die Primärressource voll ausgeschöpft wird, dann hat das Optimierungsproblem (4. 30.) genau eine zulässige Lösung, die gleichzeitig die Optimallösung dieses Problems darstellt;

A4: Wenn bei der Realisierung der Lösung von (4. 29.) die Primärressource nicht voll ausgeschöpft wird, so lässt sich dies durch die Erhöhung des Endverbrauchs in einem einzigen Zweig erreichen. Diese Erhöhung kann jedoch nur auf *eine* Weise erreichen.

Die Aussagen *A1 – A4* basieren auf folgenden Sätzen, die in [77] bewiesen wurden:

S. 4. 1.
Das Optimierungsproblem (4. 30.) sei gegeben. Dann gilt:

$$\tilde{b}((E - A(x))^{-1} y) \le \tilde{b} \quad \Leftrightarrow \quad M \neq \varnothing.$$

S. 4. 2.
Das Optimierungsproblem (4. 30.) sei gegeben. Dann gilt:

$$\tilde{b}((E - A(x))^{-1} y) \le \tilde{b} \quad \Rightarrow \quad M \text{ ist kompakt.}$$

S. 4. 3.
Das Optimierungsproblem (4. 30.) sei gegeben. Dann gilt:

$$\tilde{b}((E - A(x))^{-1} y) \le \tilde{b} \quad \Rightarrow \quad \exists x^* \in M : c^T((E - A(x^*))x^* = \sup_{x \in M} c^T((E - A(x)x).$$

S. 4. 4.
Das Optimierungsproblem (4. 30.) sei gegeben. Dann gilt:

$$\tilde{b}((E - A(x))^{-1} y) = \tilde{b} \quad \Rightarrow \quad M = \left\{(E - A(x))^{-1} y\right\}.$$

S. 4. 5.
Das Optimierungsproblem (4. 30.) sei gegeben. Sei

$$\tilde{b}((E - A(x))^{-1} y) < \tilde{b},$$

Dann existiert für jedes $i = 1, 2, ..., n$ ein eindeutiges $\beta_i > 0,$ derart dass

$$\tilde{b}((E - A(x))^{-1}(y + \beta_i e^i)) = \tilde{b}$$

gilt.
Hier ist $e^i,\ i = 1, 2, ..., n,$ der Einheitsvektor mit der Komponente Eins an der $i-$ten Stelle.

Betrachtet sei das Optimierungsproblem

(4. 31.) $$\max\left\{c^T(y + \delta) \mid \delta \in N\right\},$$

$$N := \left\{\delta \in R_+^n \mid \tilde{b}((E - A(x))^{-1}(y + \delta)) \le \tilde{b}\right\}.$$

Wir haben also ein Maximierungsproblem definiert, in dessen linearer Zielfunktion ein zusätzlicher Endverbrauch ($\delta \in R_+^n$) als Variable vorkommt. Die einzige Beschränkung dieses Problems besteht darin, dass bei der Realisierung dieses zusätzlichen Verbrauchs die verfügbare Menge an der Primärressource höchstens ausgeschöpft wird.
Es stellt sich dann u.a. folgender Zusammenhang zwischen den beiden Optimierungsproblemen (4. 30.) und (4. 31.) heraus:

x^* ist eine Optimallösung von (4. 30.), wenn

1. die Verflechtungsbedingungen in (4. 30.) für diese Lösung als Gleichung erfüllt werden;
2. δ eine Optimallösung des Problems (4. 31.) ist.

(Vgl. [77]).

Ferner sei folgendes Optimierungsproblem betrachtet:

(4. 32.) $$\max\left\{p^T(E - A(x))x \mid x \in Z\right\},$$

$$Z := \left\{x \in R_+^n \mid (E - A(x))x \geq y,\ \tilde{b}(x) \leq \tilde{b},\ x \leq \tilde{x}\right\},$$

wobei nun lediglich die Voraussetzung *V1* gelten möge. Hier sind:

$$\tilde{b}: R_+^m \to R_+^n: \text{ stetig mit der Eigenschaft: } \left\langle \forall x^1 \geq x^2,\ x^1, x^2 \in R_+^n \right\rangle \Rightarrow \tilde{b}(x^1) \geq \tilde{b}(x^2),$$
$$p := (p_i) \in R_+^n,$$
$$\tilde{b} := (\tilde{b}_i) \in R_+^m,$$
$$x := (x_i) \in R_+^n.$$

In (4. 31.) haben wir also ein Optimierungsproblem konstruiert, bei dem der nach den einzelnen Zweigen gewogene Endverbrauch der Volkswirtschaft in Abhängigkeit von deren Gesamtproduktion maximiert wird. Werden alle Gewichte gleich Eins gesetzt, so handelt es sich um die Maximierung des Nationaleinkommens.
Die Beschränkungen des Problems lauten:

- Die Gesamtproduktion muss mindestens den Endverbrauch sichern;
- Die Primärressourcen (im Allgemeinen mehrere) werden höchstens ausgeschöpft;
- Für die Gesamtproduktion gilt eine Höchstschranke.

Es sei nochmals bemerkt, dass hier von den am Anfang des Abschnitts gemachten Voraussetzungen nur die erste außer Konvexität gelten soll. Außerdem werden die Primärressourcenfunktionen als stetig und monoton wachsend vorausgesetzt.

Für das Optimierungsproblem (4. 31.) gilt nun folgende Aussage:
Das Problem (4. 31.) hat genau dann eine zulässige Lösung, wenn die Primärressourcen höchstens ausgeschöpft werden [77].
Unter den zusätzlichen Bedingungen, dass

- eine zulässige Lösung gefunden werden kann;
- die Endverbrauchsfunktionen bezüglich der Gesamtproduktion konkav sind;
- die Primärressourcenfunktionen konvex sind,

kann man zeigen, dass in (4. 31.) jedes relative Maximum zugleich ein absolutes Maximum ist [77].

4. 3. Einige Schlussfolgerungen

(1) Die Realisierung einer zur Gewährleistung eines Endverbrauchs erforderlichen Gesamtproduktion ist durch begrenzt verfügbare Primärressourcen beschränkt. Im Interesse der Effektivität der Produktion ist in der Regel eine unterproportionale Abhängigkeit der Primärressourcen von der Gesamtproduktion wünschenswert.

(2) Die praktische Anwendung der Primärressourcenfunktionen ist mit im Wesentlichen gleichen Problemen verbunden wie die der Materialaufwandsfunktionen. Das schwierige Problem der „Zeitbereinigung“ tritt auch hier auf; es kann aber über eine zweigliche Optimierungsaufgabe (vgl. *Kapitel 2*) behandelt werden.

(3) Unter Zugrundelegung spezieller nichtlinearer Primärressourcenfunktionen lassen sich Koeffizienten des direkten und des vollen Primärressourcenaufwands leicht bestimmen. Sie bilden die Grundlage für wichtige volkswirtschaftliche Kennziffern.

(4) Die Berücksichtigung begrenzt verfügbarer Ressourcen erlaubt es, statische volkswirtschaftliche Verflechtungsmodelle mit nichtlinearen Material- und Primärressourcenaufwandsfunktionen zu optimieren.
Unter recht allgemeinen Voraussetzungen lassen sich interessante Zusammenhänge zwischen dem statischen volkswirtschaftlichen Verflechtungsmodell und dem entsprechenden Optimierungsmodell feststellen. Die Lösbarkeit des Optimierungsproblems hängt im Wesentlichen davon ab, ob die Primärressourcen voll ausgeschöpft werden oder nicht.